Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Automaten und Sprachen: Theoretische Informatik für die Praxis* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-70145-4 (Softcover), ISBN 978-3-662-70146-1 (eBook), https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-70146-1. Website zum Buch: https://autospr.ch

Kapitel 1: Reguläre Sprachen

2.1. Wie viele Wörter enthalten die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$?

a) $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \le 5\}$

b) $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \le n\}$

c) $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_\mathtt{0} \le 2 \wedge |w|_\mathtt{1} \le 3\}$

d) $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_\mathtt{0} \le 1291\}$

Lösung. a) Es gibt jeweils 2^l Wörter der Länge l, also

$$|L| = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^6 - 1 = 63.$$

b) Wie in a) ist die Kardinalität von L:

$$|L| = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

c) Wir zählen die Anzahl möglicher Wörter für jede Länge, länger als 5 Zeichen kann ein Wort in L ja offenbar nicht werden. Wir bekommen folgende Tabelle

Länge	Wörter	Anzahl
0	ε	1
1	`0`, `1`	2
2	`00`, `01`, `10`, `11`	4
3	`001`, `010`, `011`, `100`, `101`, `110`, `111`	7
4	`0111`, `1011`, `1101`, `1110`	4
	`0011`, `0101`, `0110`, `1001`, `1010`, `1100`	6
5	Wähle 2 aus 5 Plätzen für die `0`: $\binom{5}{2}$	10

Insgesamt hat die Sprache L also $1 + 2 + 4 + 7 + 10 + 10 = 34$ Wörter.

d) Die Wörter aus L können beliebig viele `1` enthalten, die Sprache hat also unendlich viele Wörter. ○

2.2. In einem endlichen Automaten

$$A = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{\mathtt{u}, \mathtt{d}\}, \delta, q_3, \{q_3\})$$

ist die Funktion δ durch die folgende Tabelle definiert:

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm.

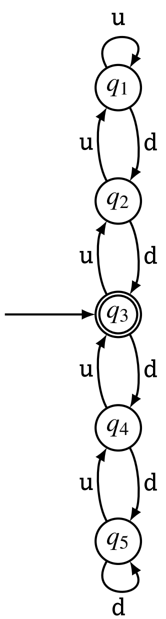
b) Akzeptiert der Automat das leere Wort ε?

c) Akzeptiert der Automat ein Wort der Länge 3?

d) Bestimmen Sie alle Wörter der Länge ≤ 4, die der Automat akzeptiert.

e) Wie viele verschiedene Wörter akzeptiert der Automat?

Lösung. a) Das Zustandsdiagramm des Automaten ist



b) Das leere Wort überführt den Startzustand q_3 in den Zustand $q_3 \in \{q_3\}$, also einen Akzeptierzustand, somit ist $\varepsilon \in L(A)$.

c) Ein Wort der Länge 3 wird von diesem Automaten nicht akzeptiert. Man kann das zum Beispiel dadurch einsehen, dass man eine Liste aller Wörter der Länge drei macht (es gibt nur 8 solche Wörter), und die dann einzeln prüft.

Oder man sagt sich, dass ein Wort mit der Länge 3 niemals die kleine Schleife an den Zuständen q_1 oder q_5 nutzen kann, weil das Wort zu kurz ist, um wieder q_3 zu erreichen. Die verbleibenden Pfeile, die das Wort nutzen kann, ändern also mit jedem Zeichen den Rest der Zustandsnummer bei Teilung durch zwei. Man kann das symbolisieren, in dem man die q_1, q_3

und q_5 schwarz einfärbt, die anderen weiß. Ein Zeichen lässt dann immer die Farbe wechseln. Mit drei Zeichen landet man auf weiß, aber der einzige Akzeptierzustand ist schwarz, also ist es nicht möglich, ein Wort der Länge drei zu akzeptieren.

Noch ein weiteres Argument verläuft wie folgt: Zunächst halten wir fest, dass der Automat auch keine Wörter der Länge 1 akzeptiert, es gibt keine Pfeile, welche von q_3 nach q_3 zurück führen. Ein Wort der Länge drei muss also mindestens die Zustände q_2 oder q_4 erreichen. Eine Zustandsänderung von dort zurück zu q_3 ergibt zwar ein akzeptiertes Wort der Länge 2, es ist aber nicht möglich, dieses zu einem akzeptierten Wort der Länge 3 zu ergänzen. Bleibt also nur ein Wort, welches sogar q_1 oder q_5 erreicht. Da es keine Pfeile von q_1 oder q_5 direkt zum einzigen Akzeptierzustand q_3 gibt, braucht es also mindestens zwei zusätzliche Zeichen, um den Akzeptierzustand q_3 zu erreichen. Somit muss ein solches Wort mindestens Länge 4 haben.

d) Wir müssen alle Wörter finden, die gleich viele u wie d enthalten. Die Anzahl solcher Wörter kann man wie folgt bestimmmen. Man muss auf die vier Stellen eines solchen Wortes zwei Buchstaben u verteilen, die anderen zwei Plätze werden dann mit d gefüllt. Das erste u können wir auf Platz 1, 2 oder 3 setzen, dann bleiben jeweils 3, 2 bzw. 1 Möglichkeiten für das zweite u, insgesamt also $3 + 2 + 1 = 6$ Möglichkeiten. Die sechs Wörter sind: udud, dudu, uddu, duud, uudd, dduu. Dazu kommen jetzt noch die zwei Wörter der Länge 2 und das leere Wort, welches Länge 0 hat. Insgesamt sind dies 9 verschiedene Wörter

$$\{\mathtt{udud}, \mathtt{dudu}, \mathtt{uddu}, \mathtt{duud}, \mathtt{uudd}, \mathtt{dduu}, \mathtt{ud}, \mathtt{du}, \varepsilon\}$$

e) Der Automat akzeptiert alle Wörter der Form

$$\mathtt{uuu}^n\mathtt{dd},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, dies sind unendlich viele verschiedene Wörter. Alternativ kann man auch die Wörter der Form $(\mathtt{ud})^n$, also die Sprache $\{(\mathtt{ud})^n \mid n \geq 0\}$ anführen, welche ebenfalls unendlich viele Wörter umfasst. ○

2.3. Finden Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache

$$L = \{w = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid |w|_{\mathtt{0}} \equiv |w|_{\mathtt{1}} \bmod 3\}$$

akzeptiert, bestehend aus Wörtern, deren Anzahl von Nullen und Einsen den gleichen Rest bei Teilung durch drei haben.

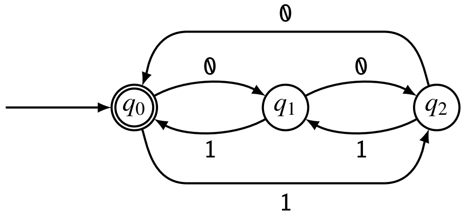
Lösung. Hier sind zwei mögliche Ansätze, wie man einen solchen endlichen Automaten konstruieren kann:

1. Man kann Automaten A_1 und A_2 konstruieren, jeweils mit drei Zuständen, die für den Dreierrest der Anzahl der Nullen bzw. der Einsen steht. Dann baut man den Produktautomaten und wählt als Akzeptierzustände die Paare bestehend aus Zuständen von A_1 und A_2, die für den gleichen Rest stehen.

2. Man kann auch direkt vorgehen, und einen Automaten konstruieren, dessen drei Zustände für den Dreierrest der Differenz der Anzahl der Nullen und Einsen steht. Um die Übergänge zu finden, muss man sich nur bei jeder 0 und jeder 1 überlegen, wie sie den Dreierrest der Differenz der Anzahl beeinflussen.

3. Man könnte den Satz von Myhill-Nerode verwenden, um die Zustände des Automaten zu rekonstruieren.

Wir verwenden für die Lösung den zweiten Ansatz. Das Zustandsdiagramm



beschreibt diesen Automaten. Der Zustand q_k codiert den Dreierrest k der Differenz $|w|_0 - |w|_1$. ○

2.4. Konstruieren Sie zu jeder der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten, der genau diese Sprache akzeptiert. Die Sprachen verwenden die Alphabete $\Sigma_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $\Sigma_2 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

a) $L = \{w \in \Sigma_1^* \mid w$ beginnt mit a und enthält höchstens ein b.$\}$

b) $L = \{w \in \Sigma_1^* \mid w$ enthält eine gerade Anzahl as und mindestens zwei bs.$\}$

c) $L = \{w \in \Sigma_1^* \mid w$ hat gerade Länge und eine ungerade Anzahl bs.$\}$

d) $L = \{w \in \Sigma_1^* \mid w$ enthält nicht genau zwei as.$\}$

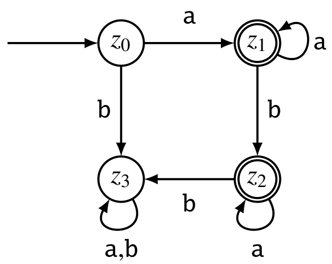
e) $L = \{w \in \Sigma_2^* \mid$ An jeder ungeraden Position von w steht ein 1.$\}$

f) $L = \{w \in \Sigma_2^* \mid |w| \leq 5\}$

g) $L = \emptyset \subset \Sigma_2^*$

Lösung. a) Die Zustände haben folgende Bedeutung:

Zustand	Bedeutung
z_0	Startzeichen des Wortes noch nicht verarbeitet
z_1	beginnt mit a, noch kein b
z_2	beginnt mit a, genau ein b
z_3	beginnt mit b oder mehr als ein b

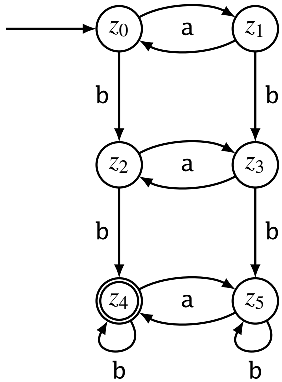


Selbstverständlich kann man diese Aufgabe auch mithilfe der Methode von Myhill-Nerode lösen. Dazu müssen die Mengen $L(w)$ bestimmt werden:

w	$L(w)$	$z_?$
ε	L	z_0
a	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid w'$ enthält höchstens ein b$\}$	z_1
b	$\emptyset$	z_3
aa	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid w'$ enthält höchstens ein b$\}$	z_1
ab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_b = 0\}$	z_2
ba	$\emptyset$	z_3
bb	$\emptyset$	z_3
$\vdots$	$\vdots$	

Offenbar gibt es vier verschiedene Mengen, also kommt der DEA von L mit 4 Zuständen aus. L(a) und L(ab) enthälten das leere Wort, sind als Akzeptierzustände. Die Übergänge können ebenfalls aus der Tabelle abgelesen werden, es ergibt sich der gleiche Automat.

b) Die Zeilen zählen die Anzahl b, die bereits gelesen wurden, die Spalten führen Buch über den Zweierrest der Anzahl a.

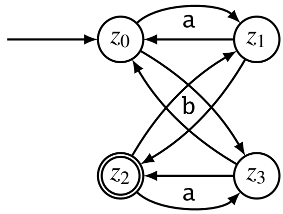


Lösung mit Myhill-Nerode: Startzustand ist L, weitere Mengen der Form $L(w)$ sind

w	$L(w)$	z_i	$\varepsilon \in L(w)$
ε	L	$= L_0$	nein
a	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ ungerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 2\}$	$= L_1$	nein
b	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ gerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 1\}$	$= L_2$	nein
aa	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ gerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 2\}$	$= L_0$	nein
ab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ ungerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 1\}$	$= L_3$	nein
bb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ gerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 0\}$	$= L_4$	ja
aaa	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ ungerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 2\}$	$= L_1$	nein
aab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ gerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 1\}$	$= L_2$	nein
abb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ ungerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 0\}$	$= L_5$	nein
bbb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a$ gerade, $\lvert w'\rvert_b \geq 0\}$	$= L_4$	ja

Die Zustände L_i entsprechen den z_i im Zustandsdiagramm.

c) Die Zeilen codieren den Zweierrest der Anzahl bs, die Spalten den Zweierrest der Länge von w.

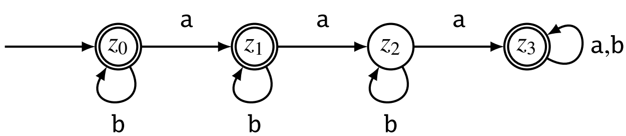


Lösung mit Myhill-Nerode: Als Zustände findet man die folgenden Mengen:

w	$L(w)$	z_i	$\varepsilon \in L(w)$
ε	L	$= L_0$	nein
a	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ ungerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ ungerade$\}$	$= L_1$	nein
b	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ ungerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ gerade$\}$	$= L_3$	nein
aa	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ gerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ ungerade$\}$	$= L_0$	nein
ab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ gerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ gerade$\}$	$= L_2$	ja
bb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ gerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ ungerade$\}$	$= L_0$	nein
aaa	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ ungerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ ungerade$\}$	$= L_1$	nein
aab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ ungerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ gerade$\}$	$= L_3$	nein
abb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ ungerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ ungerade$\}$	$= L_1$	nein
bbb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert$ ungerade, $\lvert w'\rvert_{\mathtt{b}}$ gerade$\}$	$= L_3$	nein

Die Zustande L_i entsprechen wieder den z_i von vorhin.

d) In den Zuständen $z_i, i < 3$ hat das Worte genau i as, im Zustand z_3 hat das Wort 3 oder mehr as.

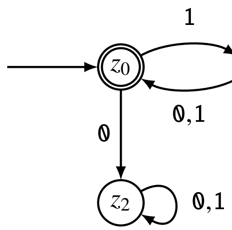


Lösung mit Myhill-Nerode:

w	$L(w)$	z_i	$\varepsilon \in L(w)$
ε	L	$= L_0$	ja
a	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 1\}$	$= L_1$	ja
b	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 2\}$	$= L_0$	ja
aa	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 0\}$	$= L_2$	nein
ab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 1\}$	$= L_1$	ja
ba	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 1\}$	$= L_1$	ja
bb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 2\}$	$= L_0$	ja
aaa	Σ_1^*	$= L_3$	ja
aab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 0\}$	$= L_2$	nein
aba	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 0\}$	$= L_2$	nein
abb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 1\}$	$= L_1$	ja
baa	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 0\}$	$= L_2$	nein
bab	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 1\}$	$= L_1$	ja
bba	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 1\}$	$= L_1$	ja
bbb	$\{w' \in \Sigma_1^* \mid \lvert w'\rvert_a \neq 2\}$	$= L_0$	ja

e) Bedeutung der Zustände:

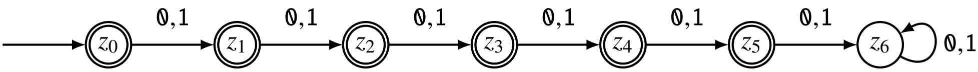
Zustand	Beschreibung
z_0	gerades Zeichen, Bedingung an ungeraden Stellen immer erfüllt
z_1	ungerades Zeichen war eine 1
z_2	0 an ungerader Stelle



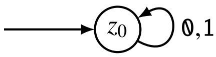
Lösung mit Myhill-Nerode: Die Zustände sind

w	$L(w)$	z_i	$\varepsilon \in L(w)$
ε	L	$= L_0$	ja
0	$\emptyset$	$= L_2$	ja
1	$\{w' \in \Sigma_2^* \mid$ an jeder geraden Stelle eine 1$\}$	$= L_1$	ja
00	$\emptyset$	$= L_2$	nein
01	$\emptyset$	$= L_2$	nein
10	L	$= L_0$	ja
11	L	$= L_0$	ja
000	$\emptyset$	$= L_2$	nein
001	$\emptyset$	$= L_2$	nein
010	$\emptyset$	$= L_2$	nein
011	$\emptyset$	$= L_2$	nein
100	$\emptyset$	$= L_2$	nein
101	L	$= L_0$	ja
110	$\emptyset$	$= L_2$	nein
111	$\{w' \in \Sigma_2^* \mid$ an jeder geraden Stelle eine 1$\}$	$= L_1$	ja

f) Zustand $z_i, i < 6$ bedeutet, dass das Wort genau i Zeichen lang ist. Zustand z_6 bedeutet, dass das Wort mindestens 6 Zeichen lang ist.

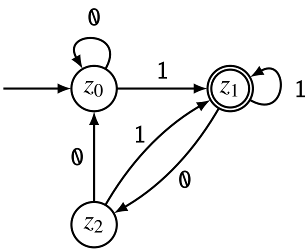


g) Kein Wort darf akzeptiert werden, d. h. die Menge der Akzeptierzustände ist leer. Der einfachste Automat, der dies erfüllt, hat genau einen Zustand und eine triviale Übergangsfunktion:



Lösung mit Myhill-Nerode: Startzustand ist die Menge $L = \emptyset$ Da $\varepsilon \notin \emptyset$ ist dieser Zustand kein Startzustand. Außerdem sind die $L(w)$ für jedes $w \in \Sigma_2^*$ weitere Zustände. Nach Definition ist $L(w) = \{w_e \in \Sigma_2^* \mid ww_e \in \emptyset\} = \emptyset$, es gibt also nur einen einzigen Zustand, damit ist der Automat bereits vollständig definiert. ○

2.5. Untersuchen Sie, welche der Zustände im Automaten



äquivalent sind, und finden Sie den minimalen Automaten.

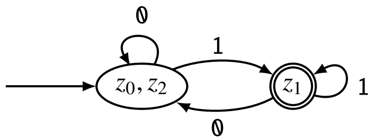
Lösung. z_0 und z_2 sind äquivalent, denn von beiden aus werden genau die Wörter akzeptiert, die mit beliebig vielen $\mathtt{0}$ gefolgt von einer $\mathtt{1}$ beginnen. z_1 ist mit keinem anderen Zustand äquivalent, weil im Zustand z_1 das leere Wort akzeptiert werden kann, nicht aber in den anderen Zuständen.

Mit dem “Kreuzchen-Algorithmus” lässt sich der Minimalautomat natürlich auch finden:

	z_0	$z_1/\mathtt{E}$	z_2
z_0	$\equiv$	$\times$	
z_1/F	$\times$	$\equiv$	$\times$
z_2		$\times$	$\equiv$

Der $\mathtt{0}$-Übergang von z_0 und z_2 führt zu z_0, der $\mathtt{1}$-Übergang zu z_1, in beiden Fällen kann man also kein neues Kreuz im Feld (z_0, z_2) machen, der Algorithmus endet. Man schließt, dass z_0 und z_2 äquivalent sein müssen.

Legt man z_0 und z_2 zusammen, wird der Automat vereinfacht zu



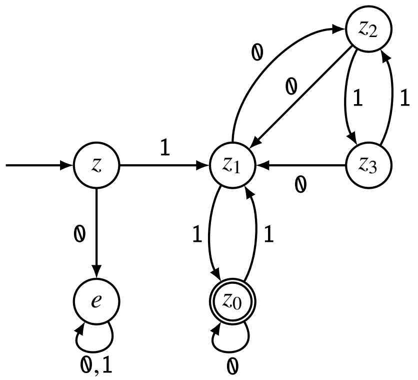
○

2.6. Betrachten Sie den folgenden, in Tabellenform gegebenen Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

	$\mathtt{0}$	$\mathtt{1}$
z	e	z_1
z_0/F	z_0	z_1
z_1	z_2	z_0
z_2	z_1	z_3
z_3	z_1	z_2
e	e	e

Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Automaten. Konstruieren Sie den zugehörigen minimalen Automaten.

Lösung. Das folgende Zustandsdiagramm beschreibt den DEA:



Für die Bestimmung der äquivalenten Zustände bauen wir die Tabellen der nicht äquivalenten Zustände auf. Im ersten Schritt werden die Paare aus einem Akzeptierzustand und einem Nicht-Akzeptierzustand markiert:

	z	z_0/F	z_1	z_2	z_3	e
z	$\equiv$	$\times$				
z_0/F	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
z_1		$\times$	$\equiv$			
z_2		$\times$		$\equiv$		
z_3		$\times$			$\equiv$	
e		$\times$				$\equiv$

In den folgenden Schritten prüft man jedes noch nicht markierte Paar von Zuständen, ob sie sich durch Anwendung der Übergangsfunktion in ein Paar überführen lassen, welches bereits markiert ist. Ist dies der Fall, wird das entsprechende Feld ebenfalls markiert. In den folgenden Tabellen sind die jeweils bereits bekannten Markierungen mit dem Zeichen $\otimes$ ausgeführt.

	z	z_0/F	z_1	z_2	z_3	e
z	$\equiv$	$\otimes$	$\times$			
z_0/F	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
z_1	$\times$	$\otimes$	$\equiv$	$\times$	$\times$	$\times$
z_2		$\otimes$	$\times$	$\equiv$		$\times$
z_3		$\otimes$	$\times$		$\equiv$	$\times$
e		$\otimes$	$\times$	$\times$	$\times$	$\equiv$

In der zweiten Iteration können noch sechs Paare markiert werden:

	z	z_0/F	z_1	z_2	z_3	e
z	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\times$
z_0/F	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
z_1	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
z_2	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$		$\otimes$
z_3	$\times$	$\otimes$	$\otimes$		$\equiv$	$\otimes$
e	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$

Aber in der letzten Iteration bleiben die Felder (z_2, z_3) und (z_3, z_2) unmarkiert, die beiden Zustände sind also äquivalent:

	z	z_0/F	z_1	z_2	z_3	e
z	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
z_0/F	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
z_1	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
z_2	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$		$\otimes$
z_3	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$		$\equiv$	$\otimes$
e	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$

Durch Zusammenlegen im Zustandsdiagramm erhält man jetzt als kleinsmöglichen Automaten: