

Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Automaten und Sprachen: Theoretische Informatik für die Praxis* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-70145-4 (Softcover), ISBN 978-3-662-70146-1 (eBook), <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-70146-1>. Website zum Buch: <https://autospr.ch>

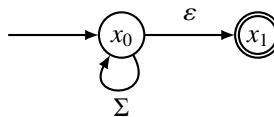
Kapitel 3: Nichtdeterministische endliche Automaten

3.1. Sei Σ ein Alphabet und $a \in \Sigma$. Ist die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält an der drittletzten Stelle das Zeichen } a.\}$$

regulär? Falls ja, konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten, der die Sprache akzeptiert.

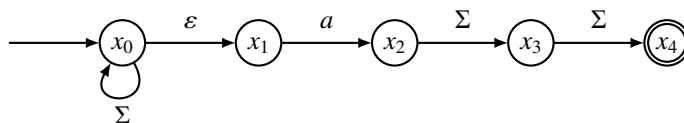
Lösung. Einen endlichen Automaten, der L akzeptiert, kann man wie folgt konstruieren. Zunächst braucht man einen Automaten, der beliebige Folgen von Zeichen akzeptiert. Das schafft der nichtdeterministische Automat



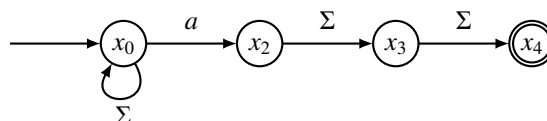
Nun muss das Wort aber mit einer Folge ganz bestimmter Länge enden, also mit einem Wort, welches vom Automaten



Einen nichtdeterministischen Automaten kann durch Zusammenhängen dieser beiden Automaten erreichen:



Noch etwas sparsamer, aber äquivalent ist der Automat

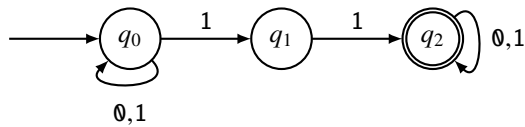


in dem man den ε -Übergang einspart, aber dafür im Zustand x_0 nichtdeterministisch einen Übergang zu x_0 oder x_2 wählen muss, wenn das Zeichen a gelesen wird. ○

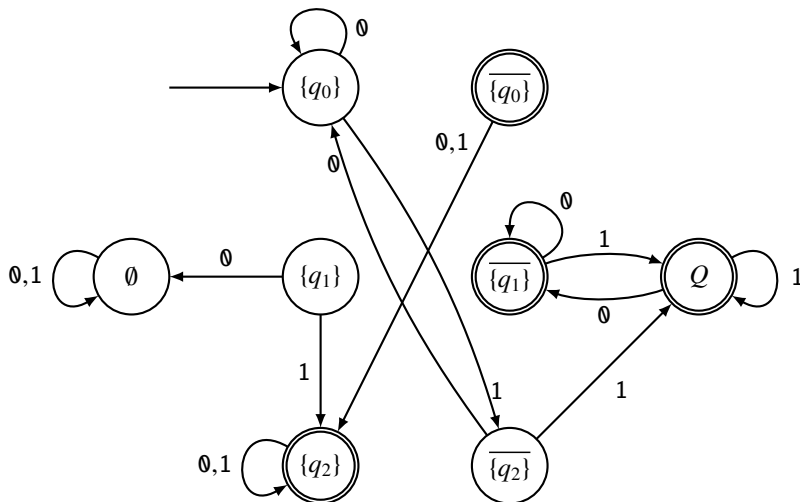
3.2. Konstruieren Sie für jede der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ einen NEA. Reduzieren Sie diesen für die Teilaufgaben a)–e) auf einen minimalen DEA.

- a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens zwei } 1 \text{ nacheinander.}\}$
- b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist eine durch drei teilbare Binärzahl.}\}$
- c) $L_3 = L_1 \cap L_2$
- d) $L_4 = L_1 \setminus L_2$
- e) $L_5 = L_1 \cup L_2$

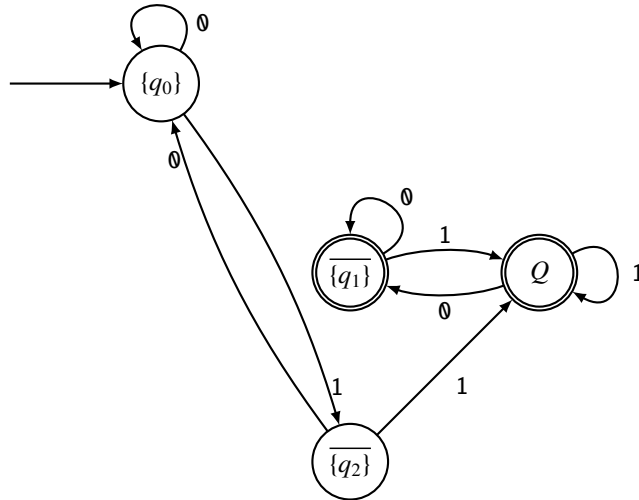
Lösung. a) Ein einfacher NEA für L_1 ist



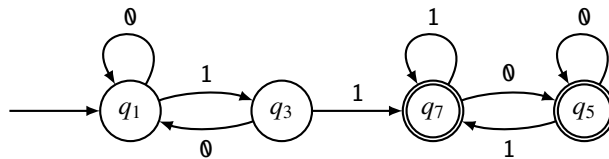
Diesen NEA können wir jetzt mit dem Standardalgorithmus in einen DEA umwandeln:



Eliminieren wir daraus die nicht erreichbaren Zustände, bleibt der DEA



Oder etwas kompakter:



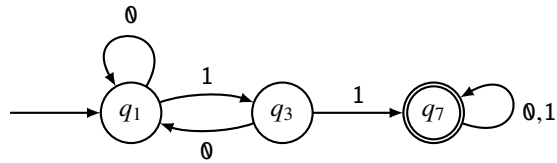
Es ist jedoch noch nicht klar, ob dieser DEA minimal ist. Daher wenden wir den Algorithmus für den Minimalautomaten an, um möglicherweise äquivalente Zustände zu finden. Nach der Markierung von Paaren aus Akzeptierzuständen und anderen Zuständen als nicht äquivalent hat man:

	q_1	q_3	q_7	q_5
q_1	$\equiv$		$\times$	$\times$
q_3		$\equiv$	$\times$	$\times$
q_7	$\times$	$\times$	$\equiv$	
q_5	$\times$	$\times$		$\equiv$

Im nächsten Schritt bekommt man:

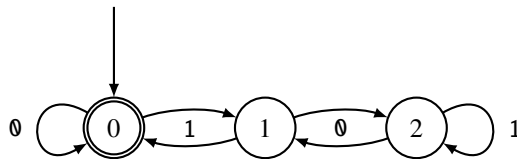
	q_1	q_3	q_7	q_5
q_1	$\equiv$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$
q_3	$\times$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$
q_7	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	
q_5	$\otimes$	$\otimes$		$\equiv$

Da das Paar (q_5, q_7) nicht als nicht-äquivalent markiert werden kann, müssen die beiden Zustände äquivalent sein, so dass der minimale Automat A_1

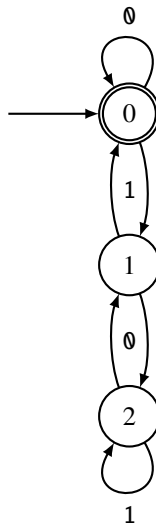


ist.

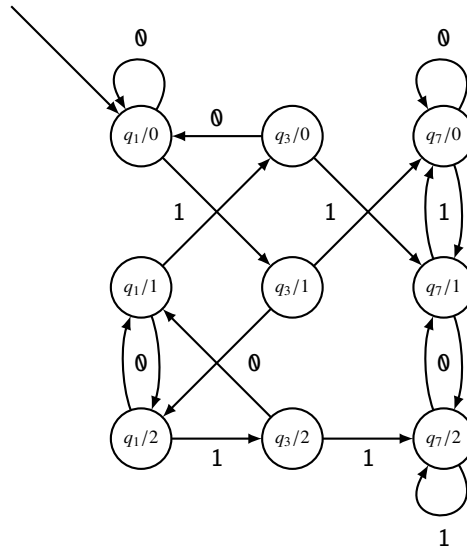
b) Der Automat A_2 für die durch drei teilbaren Binärzahlen wurde in Abschnitt 1.3.3 entwickelt:



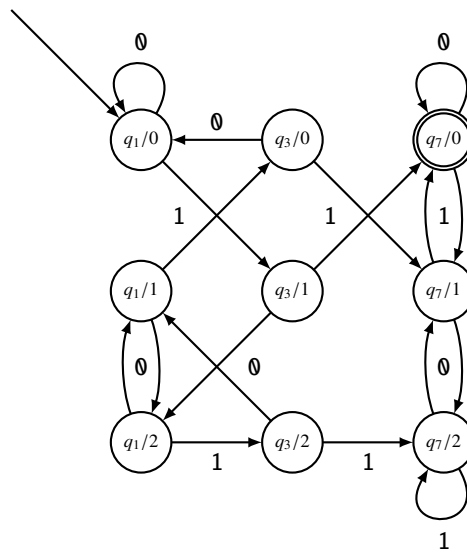
Für die folgenden Teilaufgaben ist jeweils der Produktautomat zu konstruieren. Wir tun dies jeweils so, dass der Automat für L_1 horizontal, derjenige für L_2 vertikal dargestellt wird. Daher hier nochmals der Automat für L_2 vertikal dargestellt



Der Produktautomat ohne Akzeptierzustände ist dann:



c) Die Sprache $L_1 \cap L_2$ wird von folgendem Produktautomaten akzeptiert:



Es ist aber wieder nicht klar, ob dieser Automat minimal ist. Daher wenden wir erneut den Algorithmus für den Minimalautomaten an. Im ersten Durchgang erhalten wir

	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$		$\times$						
$q_3/0$		$\equiv$	$\times$						
$q_7/0$	$\times$	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$q_1/1$			$\times$	$\equiv$					
$q_3/1$			$\times$		$\equiv$				
$q_7/1$			$\times$			$\equiv$			
$q_1/2$			$\times$				$\equiv$		
$q_3/2$			$\times$					$\equiv$	
$q_7/2$			$\times$						$\equiv$

Zweiter Durchgang:

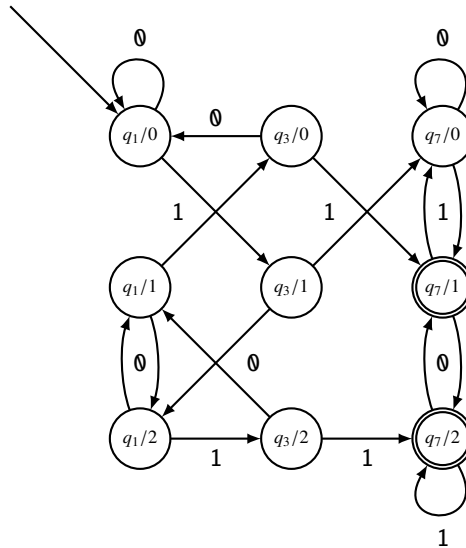
	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$		$\otimes$		$\times$	$\times$			$\times$
$q_3/0$		$\equiv$	$\otimes$		$\times$	$\times$			$\times$
$q_7/0$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$q_1/1$			$\otimes$	$\equiv$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
$q_3/1$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\equiv$		$\times$	$\times$	$\times$
$q_7/1$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$		$\equiv$	$\times$	$\times$	$\times$
$q_1/2$			$\otimes$		$\times$	$\times$	$\equiv$		$\times$
$q_3/2$			$\otimes$	$\times$	$\times$	$\times$		$\equiv$	$\times$
$q_7/2$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\equiv$

Dritter Durchgang:

	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$		$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$
$q_3/0$		$\equiv$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$
$q_7/0$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$q_1/1$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$
$q_3/1$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$q_7/1$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$q_1/2$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\times$	$\otimes$
$q_3/2$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\equiv$	$\otimes$
$q_7/2$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$

Das letzte verbleiben Paar $(q_1/0, q_3/0)$ kann im nächsten Durchgang ebenfalls als nicht äquivalent erkannt werden, womit gezeigt ist, dass der Automat minimal ist.

- d) Die Mengendifferenz $L_1 \setminus L_2$ wird akzeptiert von dem Automaten, der als Akzeptierzustände die Paare von Akzeptierzuständen hat, welche aus Akzeptierzuständen von A_1 und Nicht-Akzeptierzuständen von A_2 bestehen:



Auch hier muss wieder mithilfe des Algorithmus für den Minimalautomaten sichergestellt werden, dass tatsächlich ein minimaler Automat vorliegt:

	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$					$\times$			$\times$
$q_3/0$		$\equiv$				$\times$			$\times$
$q_7/0$			$\equiv$			$\times$			$\times$
$q_1/1$				$\equiv$		$\times$			$\times$
$q_3/1$					$\equiv$	$\times$			$\times$
$q_7/1$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\times$	
$q_1/2$						$\times$	$\equiv$		$\times$
$q_3/2$						$\times$		$\equiv$	$\times$
$q_7/2$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\equiv$

Zweiter Durchgang:

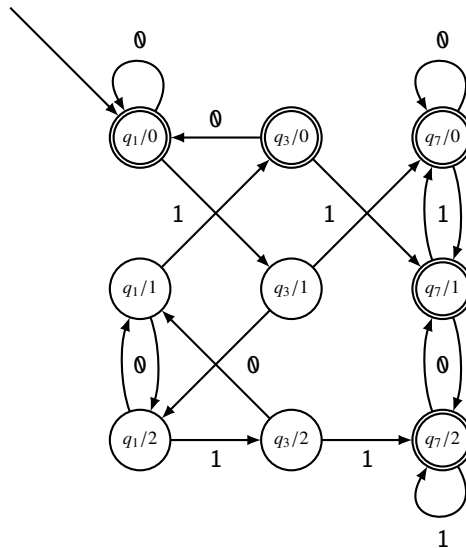
	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$	$\times$	$\times$			$\otimes$		$\times$	$\otimes$
$q_3/0$	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$		$\otimes$
$q_7/0$	$\times$	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$
$q_1/1$		$\times$	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\otimes$		$\times$	$\otimes$
$q_3/1$		$\times$	$\times$	$\times$	$\equiv$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$
$q_7/1$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$
$q_1/2$		$\times$	$\times$		$\times$	$\otimes$	$\equiv$	$\times$	$\otimes$
$q_3/2$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\equiv$	$\otimes$
$q_7/2$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$

Dritter Durchgang:

	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$
$q_3/0$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$
$q_7/0$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$q_1/1$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$
$q_3/1$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$q_7/1$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$q_1/2$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$
$q_3/2$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$
$q_7/2$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$

Somit sind alle Zustände nicht äquivalent, der Automat ist also minimal.

- e) Die Vereinigung $L_1 \cup L_2$ wird akzeptiert von dem Automaten, der als Akzeptierzustände die Paare von Akzeptierzuständen hat, welche aus Akzeptierzuständen von A_1 oder von A_2 bestehen:



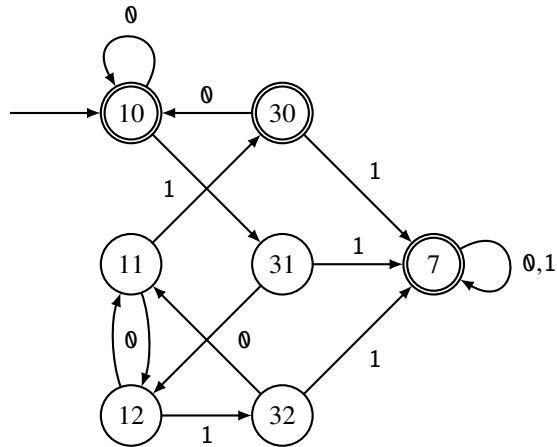
Auch hier muss wieder mithilfe des Algorithmus für den Minimalautomaten sichergestellt werden, dass tatsächlich ein minimaler Automat vorliegt:

	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$			$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	
$q_3/0$		$\equiv$		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	
$q_7/0$			$\equiv$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	
$q_1/1$	$\times$	$\times$	$\times$	$\equiv$		$\times$			$\times$
$q_3/1$	$\times$	$\times$	$\times$		$\equiv$	$\times$			$\times$
$q_7/1$				$\times$	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\times$	
$q_1/2$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	$\equiv$		$\times$
$q_3/2$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$		$\equiv$	$\times$
$q_7/2$				$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\equiv$

Zweiter Durchgang:

	$q_1/0$	$q_3/0$	$q_7/0$	$q_1/1$	$q_3/1$	$q_7/1$	$q_1/2$	$q_3/2$	$q_7/2$
$q_1/0$	$\equiv$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$
$q_3/0$	$\times$	$\equiv$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$
$q_7/0$	$\times$	$\times$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$		$\otimes$	$\otimes$	
$q_1/1$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$
$q_3/1$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\equiv$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$
$q_7/1$	$\times$	$\times$		$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$	$\otimes$	$\otimes$	
$q_1/2$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\equiv$	$\times$	$\otimes$
$q_3/2$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\equiv$	$\otimes$
$q_7/2$	$\times$	$\times$		$\otimes$	$\otimes$		$\otimes$	$\otimes$	$\equiv$

Die verbleibenden Felder lassen sich nicht mehr als nicht äquivalent erkennen, also müssen sie äquivalent sein. Man kann also die Zustände $q_7/0$, $q_7/1$ und $q_7/2$ zusammenlegen, und erhält so einen DEA mit nur noch 7 Zuständen:



○