Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Automaten und Sprachen: Theoretische Informatik für die Praxis* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-70145-4 (Softcover), ISBN 978-3-662-70146-1 (eBook), https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-70146-1. Website zum Buch: https://autospr.ch

Kapitel 9: Abzählbar und überabzählbar unendlich

9.1. Sind die folgenden Mengen abzählbar oder überabzählbar unendlich?

a) Die Menge G_n aller linearen Gleichungssysteme mit n Gleichungen und n Unbekannten und ganzzahligen Koeffizienten und rechten Seiten.

b) Die Menge G aller linearen Gleichungssysteme mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten und ganzzahligen Koeffizienten.

c) Die Menge $\mathbb{Z}[X]_n$ aller Polynome

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots a_2X^2 + a_1X + a_0$$

vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten.

d) Die Menge $\mathbb{Z}[X]$ aller Polynome beliebigen Grades n mit ganzzahligen Koeffizienten.

e) Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist eine Nullstelle von $X^2 - 2$ und ist daher algebraisch. Die Zahlen π und e sind dagegen nicht algebraisch. Ist die Menge $\mathbb{A}$ aller algebraischen Zahlen abzählbar oder überabzählbar unendlich?

Lösung. a) Ein $n \times n$-Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten ist beschrieben durch n^2+n ganze Zahlen, nämlich die n^2 Koeffizienten und die n rechten Seiten. Die Menge der $n\times n$-Gleichungssysteme ist daher gleich mächtig wie $\mathbb{Z}^{n(n+1)}$, eine abzählbar unendliche Menge.

b) Die Menge G aller Gleichungssysteme ist daher

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \simeq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{n(n+1)}.$$

Die rechte Seite ist als abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar.

c) Die Menge der Polynome vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten ist gleich mächtig wie die Menge $\mathbb{Z}^{n+1}$. Die Abbildung

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots a_2X^2 + a_1X + a_0 \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

vermittelt die bijektive Abbildung zwischen G und $\mathbb{Z}^{n+1}$.

d) Die Menge $\mathbb{Z}[X]$ der ganzzahligen Polynome ist gleichmächtig

$$\mathbb{Z}[X] \simeq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[X]_n \simeq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Da $\mathbb{Z}[X]_n$ abzählbar unendlich ist, ist auch $\mathbb{Z}[X]$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar.

e) Zu jeder algebraischen Zahl gibt es ein ganzzahliges Polynom, welches die algebraische Zahl als Nullstelle hat. Es gibt nur abzählbar unendlich viele verschiedene ganzzahlige Polynome also kann es höchstens abzählbar unendlich viele algebraische Zahlen geben. ○

9.2. Welche der folgenden Mengen sind abzählbar unendlich, welche sind überabzählbar unendlich?

a) Die Menge aller regulären Ausdrücke.

b) Die Menge aller regulären Sprachen.

c) Die Menge aller kontextfreien Grammatiken.

d) Die Menge aller kontextfreien Sprachen.

e) Die Menge aller Stackautomaten.

Lösung. a) Die regulären Ausdrücke sind Wörter über einem um die Metazeichen erweiterten Alphabet. Schreiben wir M für die Menge der Metazeichen, dann sind die regulären Ausdrücke Teilmenge von $(\Sigma \cup M)^*$, die abzählbar unendlich ist.

b) Zu jeder regulären Sprache gibt es einen regulären Ausdruck. Da es nur abzählbar unendlich viele reguläre Ausdrücke gibt, kann es auch nur abzählbar unendlich viele reguläre Sprachen geben.

c) Die kontextfreien Grammatiken kann man zum Beispiel nach Anzahl Regeln ihrer Chomsky-Normalform aufzählen, also ist die Menge der kontextfreien Grammatiken abzählbar.

d) Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es eine kontextfreie Grammatik. Da es nur abzählbar unendlich viele verschiedene kontextfreie Grammatiken gibt, kann es auch nur abzählbar unendlich viele verschiedene kontextfreie Sprachen geben.

e) Ein Stackautomat wird durch die Tabelle der Übergangsfunktion beschrieben, die sich als Zeichenkette formattieren lässt. Da es nur abzählbar unendlich viele Zeichenketten gibt, kann es auch nur abzählbar unendlich viele verschiedene Stackautomaten geben. ○