

Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Automaten und Sprachen: Theoretische Informatik für die Praxis* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-70145-4 (Softcover), ISBN 978-3-662-70146-1 (eBook), <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-70146-1>. Website zum Buch: <https://autospr.ch>

Kapitel 10: Turing-Maschinen

10.1. Beschreiben Sie eine Turing-Maschine, welche eine binär auf dem Band angegebene Zahl um 1 erhöht.

Lösung. Nachdem das Wort auf das Band geschrieben und der Kopf auf den Anfang des Wortes positioniert worden ist, beginnt die Turingmaschine zu arbeiten.

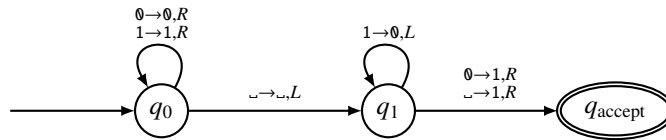
Falls am Ende des Programms der Schreib-Lesekopf wieder auf dem Anfang des Wortes stehen soll (was zum Beispiel dann sinnvoll ist, wenn man den Schreib-/Lesekopf auch dazu verwenden will das Resultat wieder auszulesen), müssen folgende Schritte durchgeführt werden:

1. Solange unter dem Schreib-/Lesekopf ein Zeichen aus Σ zu lesen ist, bewege den Kopf nach rechts.
2. Bewege den Kopf um ein Zeichen nach links.
3. Lese das Zeichen vom Band. Falls das Zeichen $\emptyset$ ist, schreibe eine 1 auf das Band, und merke Dir den Übertrag $\emptyset$. Falls das Zeichen 1 ist, schreibe eine $\emptyset$ auf das Band und merke Dir den Übertrag 1. Bewege den Kopf nach links.
4. Falls das Band einen Blank enthält, und der Übertrag 1 ist, schreibe eine 1 auf das Band und halte in q_{accept} . Falls der Übertrag aber $\emptyset$ ist, halte im Zustand q_{accept} .
5. Falls das Band eine $\emptyset$ enthält und der Übertrag $\emptyset$ ist, schreibe eine $\emptyset$ auf das Band, bewege den Kopf nach Links und fahre weiter bei 4.
6. Falls das Band eine $\emptyset$ enthält und der Übertrag 1 ist oder umgekehrt, schreibe einen 1 auf das Band, merke Dir Übertrag $\emptyset$ und bewege den Kopf nach links. Weiter bei 4.
7. Falls das Band eine 1 enthält und der Übertrag ebenfalls 1 ist, schreibe eine $\emptyset$ auf das Band, merke Dir Übertrag 1, bewege den Kopf nach links und fahre weiter bei 4.

Etwas schneller geht es, wenn man keine Voraussetzung über die Endposition von Schreib-/Lesekopf macht:

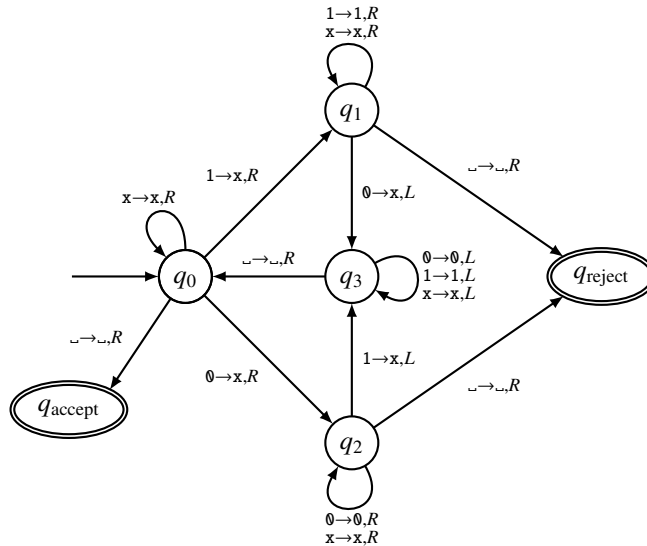
1. Fahre nach rechts bis zu einem Blank, bewege den Kopf nach links.
2. Solange eine 1 unter dem Schreib-/Lesekopf steht, ersetze sie durch $\emptyset$ und bewege den Kopf nach links.
3. Wenn eine $\emptyset$ oder ein $\sqcup$ unter dem Schreib-/Lesekopf steht, ersetze sie durch 1 und gehe in den Zustand q_{accept}

Man kann diese Turing-Maschine auch als Zustandsautomaten darstellen:



○

10.2. Gegeben ist die Turingmaschine mit dem Zustandsdiagramm



über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und dem Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, x, \sqcup\}$.

- Wird das Wort 101 akzeptiert?
- Wird das Wort 0110 akzeptiert?
- Falls das Band zwei durch $\sqcup$ getrennte Wörter enthält, kann das zweite Wort einen Einfluss darauf haben, ob der Input akzeptiert wird?
- Es wird behauptet, dass die Maschine alle Wörter w mit $|w|_0 = |w|_1$ akzeptiert. Ist dies korrekt?

Lösung. a) Die Verarbeitung des Wortes 101 ist (Zeichen unter dem Schreib-/Lesekopf jeweils rot)

q_0	$\sqcup$	1	0	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_1	$\sqcup$	x	0	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_3	$\sqcup$	x	x	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_3	$\sqcup$	x	x	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_0	$\sqcup$	x	x	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_0	$\sqcup$	x	x	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_0	$\sqcup$	x	x	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_0	$\sqcup$	x	x	1	$\sqcup$	$\sqcup$
q_1	$\sqcup$	x	x	x	$\sqcup$	$\sqcup$
q_{reject}	$\sqcup$	x	x	x	$\sqcup$	$\sqcup$

Das Wort 101 wird nicht akzeptiert.

b) Die Verarbeitung des Wortes 0110 ist (Zeichen unter dem Schreib-/Lesekopf jeweils rot)

q_0		␣	0	1	1	0	␣	␣
q_2		␣	x	1	1	0	␣	␣
q_3		␣	x	x	1	0	␣	␣
q_3		␣	x	x	1	0	␣	␣
q_0		␣	x	x	1	0	␣	␣
q_0		␣	x	x	1	0	␣	␣
q_0		␣	x	x	1	0	␣	␣
q_1		␣	x	x	x	0	␣	␣
q_3		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_3		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_3		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_3		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_0		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_0		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_0		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_0		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_0		␣	x	x	x	x	␣	␣
q_{accept}		␣	x	x	x	x	␣	␣

Das Wort 0110 wird also akzeptiert.

c) Zunächst ist festzuhalten, dass Σ das Zeichen $\sqcup$ nicht enthält, dass diese hypothetische Situation also normalerweise nicht auftritt. Leerzeichen zeigen also immer an, dass man auf einen Teil des Bandes gestoßen ist, der nicht vom Input-Wort initialisiert worden ist. Es geht also um die hypothetische Situation, dass man im Input $\sqcup$ -Zeichen zulässt, und man möchte wissen, wie die Maschine damit umgeht.

Das erste $\sqcup$ -Zeichen rechts vom Wortanfang kann nur durch die Übergänge von q_1 nach q_{reject} , von q_2 nach q_{reject} und von q_0 nach q_{accept} überschritten werden. Der Übergang von q_3 nach q_0 folgt immer auf einen Übergang mit Kopfbewegung nach links, das Leerzeichen muss also ein Leerzeichen links vom ersten Wort sein. Da die Maschine nach allen genannten Übergängen anhält, wird der nachfolgende Teil des Bandes nie gelesen, und kann daher auch den Ausgang nicht beeinflussen.

d) Die Turingmaschine überschreibt 0 und 1 paarweise mit x und akzeptiert, wenn am Schluss nur x dastehen. Die akzeptierte Sprache ist daher

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 = |w|_1\}.$$

○

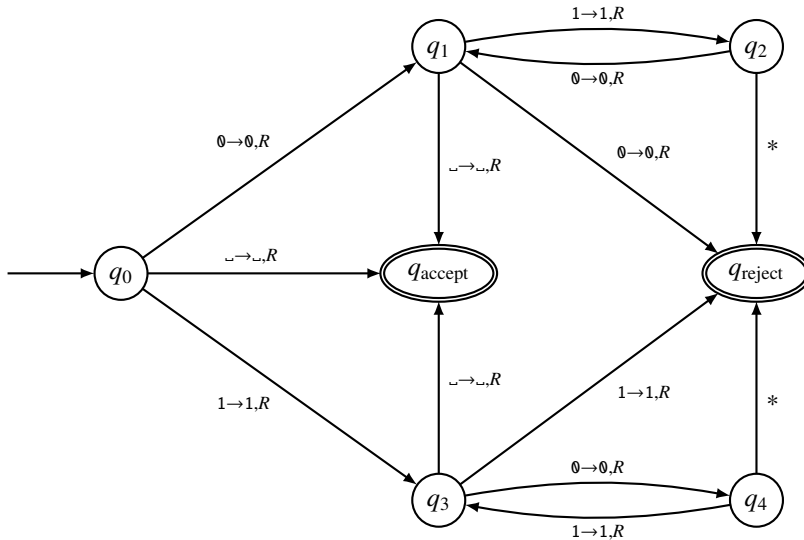
Bewertung. Teilaufgabe a) (A) 1 Punkt, Teilaufgabe b) (B) 1 Punkt, Teilaufgabe c): korrekte Antwort (C_a) 1 Punkt, Begründung (C_b) 1 Punkt, Teilaufgabe d): korrekte Antwort (D_a) 1 Punkt, Begründung (D_b) 1 Punkt.

10.3. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und

$$L = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} w \text{ besteht abwechselnd aus } 0 \text{ und } 1 \text{ und hört mit} \\ \text{dem gleichen Zeichen auf wie es beginnt} \end{array} \right\}.$$

Finden Sie das Zustandsdiagramm einer Turing-Maschine, die L erkennt.

Lösung. Die Turing-Maschine muss die beiden Fälle unterscheiden, dass das Wort mit 0 oder mit 1 beginnt, dazu dienen der obere und der untere Ast des Diagramms.

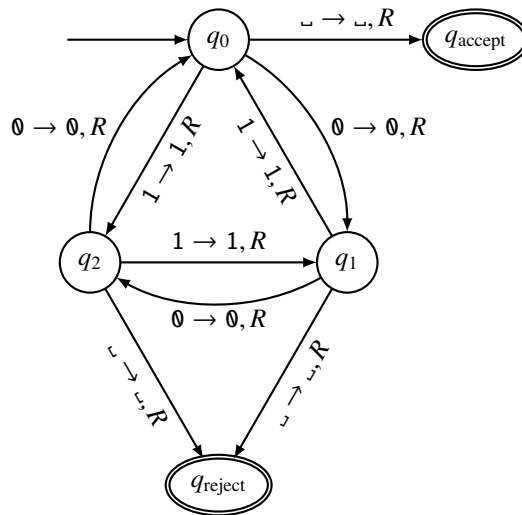


Darin bedeuten die mit * bezeichneten Pfeile alle Übergänge, für die es ausgehend von diesem Zustand noch keinen Übergang gibt.

Im Zustand q_1 bzw. q_3 hat die Maschine jeweils das gleiche Zeichen verarbeitet, mit dem das Wort begonnen hat. Nur von diesen Zuständen aus ist daher ein Übergang zu q_{accept} möglich, aber auch nur mit dem Zeichen $\sqcup$. Alle anderen Zeichen müssen zu q_{reject} führen. $\bigcirc$

Bewertung. Maschine ist deterministisch (**D**) 1 Punkt, Maschine erkennt Wortende (**E**) 1 Punkt, Maschine akzeptiert nur alternierende Folgen (**A**) 2 Punkte, Maschine akzeptiert nur Folgen, die mit dem gleichen Zeichen enden wie sie beginne (**G**) 2 Punkt.

10.4. Betrachten Sie die Turing-Maschine M mit dem Zustandsdiagramm



a) Wie wird das Wort 001011 verarbeitet?

b) Welche der Wörter

01, 01000, 01000000, 111, 0111, 000111, 000111111, 00010101111

werden akzeptiert?

c) Welche Sprache wird von M akzeptiert?

Lösung. a) Die Berechnungsgeschichte für das Wort $w = 001011$ ist

Zustand								
q_0	␣	0	0	1	0	1	1	␣
q_1	␣	0	0	1	0	1	1	␣
q_2	␣	0	0	1	0	1	1	␣
q_1	␣	0	0	1	0	1	1	␣
q_2	␣	0	0	1	0	1	1	␣
q_1	␣	0	0	1	0	1	1	␣
q_0	␣	0	0	1	0	1	1	␣
q_{accept}	␣	0	0	1	0	1	1	␣

b) Da nur Kopfverschiebungen nach rechts vorkommen, wird das Wort genau einmal durchgelesen, die Maschine realisiert also eigentlich nur einen endlichen Automaten. Mit jedem 0 auf dem Band ändert sich der Zustand im oberen Dreieck des Zustandsdiagramm im Uhrzeigersinn, mit jedem 1 auf dem Band im Gegenuhrzeigersinn. Akzeptiert wird, wenn der Zustand am Ende des Wortes q_0 ist. Damit findet man schnell, dass

01, 01000, 01000000, 111, 000111, 000111111

akzeptiert und

0111, 0001010111

verworfen werden.

- c) Akzeptiert werden kann nur, wenn die Differenz der Anzahl der Nullen und Einsen die Maschine am Ende des Wortes im Zustand q_0 lässt. Die akzeptierte Sprache besteht daher aus den Wörtern, deren Anzahlen von Nullen und Einsen gleichen Rest bei Teilung durch 3 haben, also

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \equiv |w|_1 \pmod{3}\}. \quad \bigcirc$$

Bewertung. a) Berechnungsgeschichte (**G**) 1 Punkt, akzeptiert (**A**) 1 Punkt.

b) Drei Punkte (**B**) 3 Punkte.

c) Dreierrestbedingung (**R**) 1 Punkt.

10.5. Betrachten Sie folgende Variante einer Turing-Maschine. In dieser Variante ist die Bewegung des Kopfes nach links nicht möglich, der Kopf kann nur nach rechts bewegt werden oder stehenbleiben. Die Übergangsfunktion ist also von der Form

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{S, R\}$$

(S für Stillstand). Welche Art von Sprachen kann mit diesem Typ Maschine erkannt werden?

Lösung. Wenn sich die Maschine entschließt, stehen zu bleiben ("Bewegung" S), ändert sie nur ihren Zustand und den Inhalt des Feldes, auf dem der Schreib-/Lesekopf gerade steht. Indem man die Zustandsmenge erweitert, kann man solche Übergänge, durch Zustandsübergänge betrachten, und all solchen Übergänge bis zur nächsten Rechtsbewegung in einen einzigen Übergang zusammenfassen. Damit bleibt nur noch eine Zustandsänderung mit jedem Input-Zeichen übrig, d. h. die Maschine liest den Bandinhalt von links nach rechts und ändert den Zustand bei jedem Zeichen. Damit verhält sie sich genau wie ein endlicher Automat, die mit dieser Maschine erkennbaren Sprachen sind also die regulären Sprachen. $\bigcirc$